PATVIRTINTA
Nacionalinio egzaminų centro
direktoriaus
2019 m. liepos 1 d. įsakymu Nr. (1.3.)-V1-109

2019 M. MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO UŽDUOTIES VERTINIMO INSTRUKCIJA

Pagrindinė sesija

I dalis

Užd. Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Ats.	**B**	**D**	**A**	**C**	**B**	**C**	**C**	**D**	**B**	**D**

II dalis

11	1365 Eur (arba 1365).
12	75 Eur (arba 75).
13	4,5 (arba $4\frac{1}{2}$, arba $\frac{9}{2}$).
14.1	40° (arba 40).
14.2	30.
15.1	720 (arba 6!).
15.2	240.
16	$x \in (3;5)$ (arba $3 < x < 5$, arba (3,5)).
17	lg7 (arba $\log_{10} 7$, arba $\frac{\log_a 7}{\log_a 10}$, arba $\frac{\log_a 7}{\log_a 5 + \log_a 2}$, kai $a > 0$, $a \neq 1$, arba $\frac{\log_5 7}{\log_5 2 + 1}$, arba $\frac{\log_2 7}{\log_2 5 + 1}$).
18	$a \in (2;+\infty) \cup \{0\}$ (arba $a = 0$, arba $a > 2$).
19.1	-5.
19.2	-36.

III dalis

Pastaba.
III dalyje pateiktas atsakymas be sprendimo vertinamas 0 taškų.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
20		**7**	
20.1		**1**	
	$f\left(30°\right) = 5\sin 30° - \cos 60° + 1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 3.$ *Ats.:* 3.	1	Už teisingą atsakymą.
20.2		**2**	
	$f(x) = 5\sin x - \cos(2x) + 1 =$ $= 5\sin x - \cos^2 x + \sin^2 x + 1,$ arba $f(x) = 5\sin x - \cos(2x) + 1 =$ $= 5\sin x - 1 + 2\sin^2 x + 1,$	1	Už teisingą cos(2*x*) formulės pritaikymą.
	$= 5\sin x - 1 + \sin^2 x + \sin^2 x + 1 =$ $= 5\sin x + 2\sin^2 x = 2\sin x(\sin x + 2{,}5),$ arba $= 5\sin x + 2\sin^2 x = 2\sin x(\sin x + 2{,}5).$	1	Už gautą teisingą sandaugą.

Pastabos

- *Atvirkštinis įrodymo būdas.*

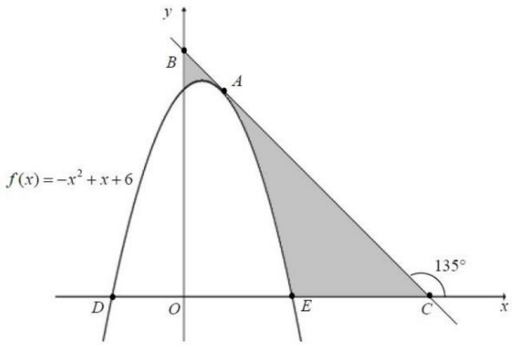
  $2\sin x(\sin x + 2{,}5) = 2\sin^2 x + 5\sin x = 2\frac{1-\cos 2x}{2} + 5\sin x = 1 - \cos 2x + 5\sin x.$

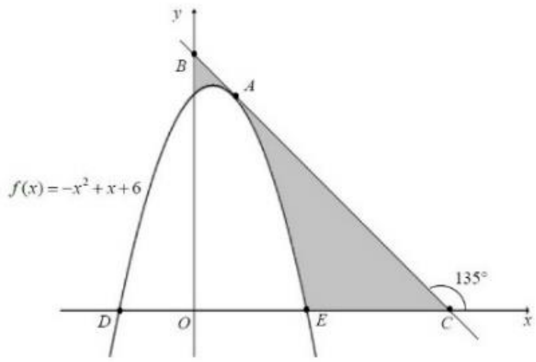
  Už šį sprendimą skiriami 2 taškai.
- *Suvedant į lygtį.*
  Sudarome lygtį ir keliame klausimą, kokiems *x* ji galioja.
  $1 - \cos 2x + 5\sin x = 2\sin x(\sin x + 2{,}5),$
  $1 - \cos 2x + 5\sin x - 2\sin^2 x - 5\sin x = 0, \quad 1 - \cos 2x - 2\sin^2 x = 0, \; 0 = 0.$
  Paskutinė, todėl ir pirma, lygtys galioja visiems realiems skaičiams.
  Už šį sprendimą skiriami 2 taškai.

20.3		**3**	
	$2\sin x(\sin x + 2{,}5) = 0,$ $2\sin x = 0$ arba $\sin x + 2{,}5 = 0,$ $x = 180° \cdot k, (k \in Z),$ $\sin x = -2{,}5,$ (arba $x = \pi k, (k \in Z)$), Sprendinių nėra.	2	Po 1 tašką už kiekvieną teisingai išspręstą lygtį.
	$x = -180°; 0°; 180°.$ (arba $x = -\pi; 0; \pi$). *Ats.:* $x = -180°; 0°; 180°$ (arba $x = \pi k, k = -1; 0; 1,$ arba $x = -\pi; 0; \pi$).	1	Už teisingą atsakymą.

Pastaba
Jei vietoje $x = \pi k$ parašyta $x = (-1)^k \cdot 0 + \pi k,$ už šį atsakymą skiriamas pirmasis taškas.

20.4		**1**	
	$f(-x)=5\sin(-x)-\cos(-2x)+1=$ $=-5\sin x-\cos(2x)+1\neq f(x)$, $f(-x)=-(5\sin x+\cos(2x)-1)\neq -f(x)$, arba $f(-x)=2\sin(-x)(\sin(-x)+2{,}5)=-2\sin x(-\sin x+2{,}5)=$ $=2\sin x(\sin x-2{,}5)\neq f(x)$. $f(-x)=-(2\sin x(-\sin x+2{,}5))\neq -f(x)$. Todėl funkcija yra nei lyginė, nei nelyginė.	1	Už teisingą pagrindimą, kad funkcija yra nei lyginė, nei nelyginė.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
21		**11**	
21.1		**2**	
			
	$-x^2+x+6=0,$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (teisingai sudarytą lygtį).
	$D=25,$ $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm 5}{-2}=\left[\begin{array}{l}3\\-2\end{array}\right.$ (*netenkina sąlygos*). *Ats.:* $x=3.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
21.2		**1**	
	$f'(x)=-2x+1.$ *Ats.:* $-2x+1.$	1	Už teisingą atsakymą.
21.3		**2**	
	$f'(x_{\text{A}})=tg135°=-1,$ $-2x_{\text{A}}+1=-1,$ $x_{\text{A}}=1,$	1	Už teisingą pagrindimą, kad $x=1.$
	$y=f(1)=-1+1+6=6.$	1	Už teisingą pagrindimą, kad $y=6.$
21.4		**2**	
	I būdas $k=\text{tg }135°=-1,$ todėl $y=-x+b,$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
	$A(1;\,6),$ $6=-1+b,$ $b=7.$ *Ats.:* $y=-x+7.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas $y=f(1)+f'(1)(x-1).$	1	Už pasirinktą teisingą sprendimo būdą.
	$y=6+(-1)(x-1).$ $y=-x+7.$ *Ats.:* $y=-x+7.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

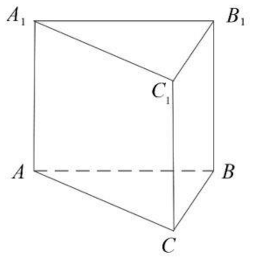
<table>
<tr><td>21.5</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="8"></td><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>I būdas
$S_{\Delta OBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{7\cdot 7}{2}=\frac{49}{2}=24{,}5,$</td><td>1</td><td>Už teisingai apskaičiuotą trikampio OBC plotą.</td></tr>
<tr><td>$S_1=\int_0^3(-x^2+x+6)dx=$</td><td>1</td><td>Už teisingą figūros, apribotos parabole ir ašimis, kai $x\in[0;3]$, ploto išreiškimą apibrėžtiniu integralu.</td></tr>
<tr><td>$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_0^3=$</td><td>1</td><td>Už teisingą pirmykštę funkciją.</td></tr>
<tr><td>$=\frac{27}{2}=13{,}5,$
$S_{\text{figūros}}=24{,}5-13{,}5=11.$
Ats.: 11.</td><td>1</td><td>Už gautą teisingą atsakymą.</td></tr>
<tr><td>II būdas
$S=\int_0^7(-x+7)dx-\int_0^3(-x^2+x+6)dx=$</td><td>2</td><td>Po vieną tašką už teisingą figūrų, apribotų parabole ir tiese, plotų išreiškimą apibrėžtiniais integralais.</td></tr>
<tr><td>$=\left(-\frac{x^2}{2}+7x\right)\Bigg|_0^7-\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_0^3=$</td><td>1</td><td>Už teisingą pirmykštę funkciją.</td></tr>
<tr><td>$=24{,}5-13{,}5=11.$
Ats.: 11.</td><td>1</td><td>Už gautą teisingą atsakymą.</td></tr>
</table>

	III būdas $\int_0^3((-x+7)-(-x^2+x+6))dx+\int_3^7(-x+7)dx=$ $=\int_0^3(x^2-2x+1)dx+\int_3^7(-x+7)dx=$	2	Po vieną tašką už teisingą figūrų, apribotų parabole ir tiese, plotų išreiškimą apibrėžtiniais integralais.
	$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Big\|_0^3+\left(-\frac{x^2}{2}+7x\right)\Big\|_3^7=$	1	Už teisingą pirmykštę funkciją.
	$=\frac{27}{3}-9+3+\left(-\frac{49}{2}+49+\frac{9}{2}-21\right)=11.$ *Ats.*: 11.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba

Sprendimas $S=\int_0^7(-x+7-(-x^2+x+6))dx=\int_0^7\left(x^2-2x+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\Big|_0^7=72\frac{1}{3}$

vertinamas 2 taškais.

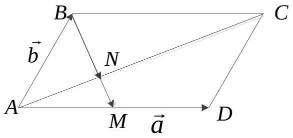
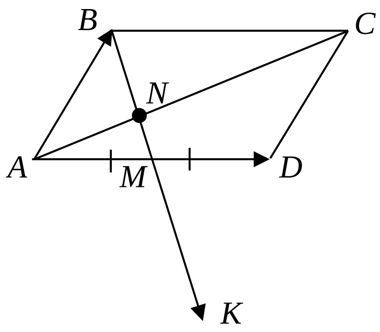
Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
22		**3**	
	 $V=S_{\text{pagrindo}}\cdot H,$ $28\sqrt{3}=7\cdot S_{\Delta ABC},$ $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{3},$	1	Už teisingai apskaičiuotą prizmės pagrindo plotą.
	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$ (arba $\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 60^\circ=4\sqrt{3}$),	1	Už sudarytą teisingą lygtį prizmės pagrindo kraštinės ilgiui apskaičiuoti.
	$a^2=16,$ $a=4.$ *Ats.*: 4.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastaba

Tegul $\|AC\|=x,$ tada $S_{\text{pagrindo}}=0{,}5x^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ (pirmas taškas – už apskaičiuotą pagrindo plotą),

$7x^2\frac{\sqrt{3}}{4}=28\sqrt{3}$ (antras taškas – už teisingai sudarytą lygtį), x = 4 (trečias taškas – už teisingai išspręstą lygtį).

Užd.	**Sprendimas ir atsakymas**	**Taškai**	**Vertinimas**
23		**3**	
23.1		**1**	
	 $AB = h\sqrt{3}.$ *Ats.:* $AB = h\sqrt{3}.$	1	Už teisingą atsakymą.
23.2		**2**	
	Pagal kosinusų teoremą: $105^2 = h^2 + \left(h\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot h\cdot h\sqrt{3}\cdot\cos150°,$	1	Už teisingai pasirinktą sprendimo būdą (pvz., pritaikytą kosinusų teoremą).
	$105^2 = 7h^2,$ $h = 15\sqrt{7}$ (arba $h = \sqrt{1575}$). *Ats.:* $15\sqrt{7}$ (arba $\sqrt{1575}$).	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
24		**5**	
24.1		**1**	
	 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$. *Ats.:* $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$.	1	Už teisingą atsakymą.
24.2		**2**	
	I būdas $\Delta ANM \sim \Delta CNB$ (pagal du kampus), tai $\frac{BC}{AM}=\frac{BN}{NM}=\frac{2}{1}$,	1	Už teisingą pagrindimą, kad $BN:NM=2:1$.
	$\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$. *Ats.:* $\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
	II būdas Nubrėžkime atkarpą *BD*. Taškas *N* yra ΔABD pusiaukraštinių susikirtimo taškas, todėl $\frac{BN}{NM}=\frac{2}{1}$.	1	Už teisingą pagrindimą, kad $BN:NM=2:1$.
	$\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$. *Ats.:* $\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
24.3.1		**1**	
	 **I būdas** $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{NK}\Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{NK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}\Rightarrow \overrightarrow{NK}\parallel\overrightarrow{BK}$.	1	Už teisingą pagrindimą, kad vektoriai kolinearūs.
	II būdas $\overrightarrow{BK}=4\overrightarrow{BN}\Rightarrow$ taškai *B, K* ir *N* yra vienoje tiesėje $\Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{BK}\parallel\overrightarrow{NK}$. Arba $\overrightarrow{BK}=4\overrightarrow{BN}\Rightarrow \overrightarrow{NK}$ ir $\overrightarrow{BK}$ yra vienoje tiesėje $\Rightarrow \overrightarrow{NK}\parallel\overrightarrow{BK}$.	1	Už teisingą pagrindimą, kad vektoriai kolinearūs.

24.3.2		**1**	
	$\overrightarrow{NK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}\Rightarrow\lvert\overrightarrow{NK}\rvert=\frac{3}{4}\lvert\overrightarrow{BK}\rvert=\frac{3}{4}\cdot 8=6.$ Arba $\overrightarrow{BK}=4\overrightarrow{BN}\Rightarrow\lvert\overrightarrow{BN}\rvert:\lvert\overrightarrow{NK}\rvert=1:3\Rightarrow\lvert\overrightarrow{NK}\rvert=$ $=\frac{3}{4}\lvert\overrightarrow{BK}\rvert=6.$ *Ats.*: 6.	1	Už gautą teisingą atsakymą.
Užd.	**Sprendimas ir atsakymas**	**Taškai**	**Vertinimas**
25		**4**	
	$b-a=10-a-b\Rightarrow b=5,$ (arba $b=\frac{a+10-a}{2}=5$),	1	Už teisingai sudarytą lygtį.
	$\frac{b+4}{a+1}=\frac{29-a}{b+4},$	1	Už teisingai pritaikytą geometrinės progresijos apibrėžtį.
	$\frac{9}{a+1}=\frac{29-a}{9},$ $(a+1)(29-a)=81,$ $29a-a^2+29-a=81,$ $-a^2+28a-52=0,$ $a^2-28a+52=0,$	1	Už gautą teisingą kvadratinę lygtį.
	$a=2$ arba $a=26$ (netenkina sąlygos). *Ats.:* $a=2,\ b=5.$	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastabos

- $\begin{cases} b-a=10-a-b, \\ \frac{b+4}{a+1}=\frac{29-a}{b+4}. \end{cases}$ Už pirmąją lygtį – pirmas taškas. Už antrąją lygtį – antras taškas.

  Už ekvivalentų pertvarkymą iki $\begin{cases} b=5, \\ a^2-28a+52=0, \end{cases}$ – trečias taškas. Už teisingą atsakymą $a=2, b=5$ – ketvirtas taškas.

- Už lygčių sistemą $\begin{cases} a_1=a, \\ a_1+d=b, \\ a_1+2d=10-a \end{cases}$ skiriamas pirmas taškas. Jis skiriamas tik už tokią lygčių sistemą, t. y. būtina, kad kairioji pusė būtų užrašyta tik per du naujus nežinomuosius: a_1 ir d.

Už lygčių sistemą $\begin{cases} b_1=a+1, \\ b_1q=b+4, \\ b_1q^2=29-a \end{cases}$ skiriamas antras taškas. Būtina, kad papildomų naujų nežinomųjų būtų tik du, t. y. b_1 ir q.

Už teisingą a ir b apskaičiavimą skiriami trečias ir ketvirtas taškai.

Užd.	Sprendimas ir atsakymas	Taškai	Vertinimas
26		5	
	Skaičius $ab+c$ yra lyginis, kai: įvykis A – „sandauga ab yra nelyginė ir skaičius c – nelyginis“ (t. y. a, b ir c – visi nelyginiai skaičiai); įvykis B – „sandauga ab yra lyginė ir skaičius c – lyginis“ (t. y. bent vienas iš skaičių a ir b – lyginis taip pat c – lyginis skaičius).	1	Už teisingai išvardytą bent vieną atvejį, kada skaičius $ab+c$ yra lyginis.
	Tikimybė, kad a, b ir c – visi nelyginiai skaičiai, yra $\mathbf{P}(A)=\left(\frac{50}{99}\right)^3$ (arba $\mathbf{P}(A)=\frac{125000}{970299}$).	1	Už teisingai apskaičiuotą įvykio A tikimybę.
	Įvykis C – bent vienas iš skaičių a ir b – lyginis, $\mathbf{P}(C)=1-\mathbf{P}(\overline{C})=1-\left(\frac{50}{99}\right)^2=1-\frac{2500}{9801}=\frac{7301}{9801}$, arba $\mathbf{P}(C)=\frac{49}{99}\cdot\frac{50}{99}\cdot 2+\left(\frac{49}{99}\right)^2=\frac{4900}{9801}+\frac{2401}{9801}=\frac{7301}{9801}$,	1	Už teisingai apskaičiuotą tikimybę, kad bent vienas iš skaičių a ir b yra lyginis.
	$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(C)\cdot\frac{49}{99}=\frac{7301}{9801}\cdot\frac{49}{99}=\frac{357749}{970299}$,	1	Už teisingai apskaičiuotą įvykio B tikimybę.
	todėl tikimybė, kad $ab+c$ yra lyginis skaičius, yra: $\frac{125000}{970299}+\frac{357749}{970299}=\frac{482749}{970299}$. *Ats.:* $\frac{482749}{970299}$.	1	Už gautą teisingą atsakymą.

Pastabos

- Pažymėkime įvykius: a_l – pirmojo ištraukto rutulio numeris yra lyginis, a_n – pirmojo ištraukto rutulio numeris yra nelyginis, analogiškai b_l ir b_n – antrojo rutulio numeriai yra lyginis ir nelyginis, c_l ir c_n trečiojo rutulio numeriai yra lyginis ir nelyginis.
  Tada $\mathbf{P}(L=$ skaičius $ab+c$ yra lyginis$)=\mathbf{P}(a_nb_nc_n \cup a_lb_nc_l \cup a_lb_lc_l \cup a_nb_lc_l)=\mathbf{P}(a_nb_nc_n)+$ $+\mathbf{P}(a_lb_nc_l)+\mathbf{P}(a_lb_lc_l)+\mathbf{P}(a_nb_lc_l)$, nes šie įvykiai yra poromis nesutaikomi.

  $\mathbf{P}(L)=\mathbf{P}(a_n)\mathbf{P}(b_n)\mathbf{P}(c_n)+\mathbf{P}(a_l)\mathbf{P}(b_n)\mathbf{P}(c_l)+\mathbf{P}(a_l)\mathbf{P}(b_l)\mathbf{P}(c_l)+\mathbf{P}(a_n)\mathbf{P}(b_l)\mathbf{P}(c_l)$, nes rutulių traukimas yra nepriklausomas vienas nuo kito.
  $$\mathbf{P}(L)=\frac{50}{99}\cdot\frac{50}{99}\cdot\frac{50}{99}+\frac{49}{99}\cdot\frac{50}{99}\cdot\frac{49}{99}+\frac{49}{99}\cdot\frac{49}{99}\cdot\frac{49}{99}+\frac{50}{99}\cdot\frac{49}{99}\cdot\frac{49}{99}=\frac{482749}{970299}.$$
  Taškas skiriamas už bent vieną palankų atvejį: $a_nb_nc_n$, $a_lb_nc_l$, $a_lb_lc_l$ arba $a_nb_lc_l$. Pirmas taškas skiriamas už išvardytą bent vieną atvejį, kai skaičius $ab+c$ yra lyginis, t. y. $a_nb_nc_n$, $a_lb_nc_l$, $a_lb_lc_l$ arba $a_nb_lc_l$.. Už bent vieną iš keturių šių atvejų teisingai apskaičiuotų tikimybių skiriamas antras taškas, už visas keturias teisingai apskaičiuotas tikimybes skiriamas trečias taškas, už teisingą sumą, t. y. $\mathbf{P}(L)$ – ketvirtas taškas, o už įvykio L apibrėžimą – penktas taškas.

  Trumpiau: už $\mathbf{P}(L)=\frac{50}{99}\cdot\frac{50}{99}\cdot\frac{50}{99}+\frac{49}{99}\cdot\frac{50}{99}\cdot\frac{49}{99}+\frac{49}{99}\cdot\frac{49}{99}\cdot\frac{49}{99}+\frac{50}{99}\cdot\frac{49}{99}\cdot\frac{49}{99}=\frac{482749}{970299}$ skiriami 4 taškai. Už L apibrėžimą skiriamas dar vienas taškas, taigi iš viso 5 taškai.

- Sprendimas, remiantis klasikiniu tikimybės apibrėžimu.

Visų bandymo baigčių skaičius $n = 99 \cdot 99 \cdot 99 = 99^3 = 970299$. Už šį skaičių skiriamas pirmas taškas.

(a, b, c) Įvykiui palankių baigčių skaičius

(N, N, N) $50 \cdot 50 \cdot 50 = 125000$,

(N, L, L) $50 \cdot 49 \cdot 49 = 120050$,

(L, N, L) $49 \cdot 50 \cdot 49 = 120050$,

(L, L, L) $49 \cdot 49 \cdot 49 = 117649$.

Už bent vieną teisingą iš šių keturių skaičių skiriamas antras taškas, už visus keturis teisingai išvardytus ir apskaičiuotus skaičius skiriamas trečias taškas.

Įvykiui L (suma $ab + c$ yra lyginė) palankių baigčių skaičius

$m = 50^3 + 2 \cdot 50 \cdot 49^2 + 49^3 = 482749$.

Įvykio L tikimybė $\mathbf{P}(L) = \frac{m}{n} = \frac{482749}{970299}$.

Už teisingą tikimybę $\mathbf{P}(L)$ skiriamas ketvirtas taškas. Už L apibrėžimą skiriamas penktas taškas.